15

18

Laguerreovi polinomi

1. Generatrisa

Funkcija

$$\Lambda(t,\tau) = \frac{e^{-\dfrac{t\tau}{1-\tau}}}{1-\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)\tau^n \tag{3.1}$$

naziva se generatrisa Laruerreovih polinoma jer su koeficijenti razvoja ove funkcije u stepeni red Laguerreovi polinomi. Iz relacije (3.1) sledi

$$L_n(t) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n \Lambda}{\partial \tau^n}\right)_{\tau=0} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{\Lambda(t,\xi)}{\xi^{n+1}}\,d\xi$$

$$\psi(t,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_c \frac{\psi(t,z)\,dz}{z-\tau}$$

$$\frac{d^n\psi}{d\tau^n} = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_c \frac{\psi(t,z)}{(z-\tau)^{n+1}}\,dz$$

vidi 15a

smena

$$\xi = 1 - \frac{t}{z}; \qquad d\xi = \frac{t}{z^2}\,dz$$

daje

$$L_n(t) = e^t \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C'} \frac{z^n e^{-z}}{(z-t)^{n+1}}\,dz.$$

Iz poslednje relacije i (3.1) dobija se

$$L_n(t) = \frac{1}{n!}e^t \frac{d^n}{dt^n}\left(t^n e^{-t}\right) \tag{3.2}$$

vidi

Iz ove formule, koja je analogna Rodrigesovoj formuli kod Legendreovih polinoma, vidi se da su funkcije $L_n(t)$ zaista polinomi i to polinomi n-tog stepena.

$$L_0(t) = 1$$
$$L_1(t) = 1 - t$$
$$L_2(t) = 1 - 2t + \frac{1}{2}t^2$$

2. Rekurentne formule

vidi 15a,d

Na osnovu razvoja (3.1) može se naći slično kao kod Legendreovih polinoma sledeća rekurentna formula

$$(n+1)L_{n+1}(t) - (2n+\overset{-t}{1})L_n(t) + nL_{n-1}(t) = 0 \tag{3.3}$$

Na osnovu ove formule ako znamo $L_0(t)$ i $L_1(t)$ (a njih uvek znamo) možemo da nađemo sve ostale Laguerreove polinome. Postoje i druge rekurentne formule, ali ih ovde nećemo izvoditi.

$$L_{n+1}(t) + (t-2n-1)L_n(t) + n^2 L_{n-1}(t) = 0$$

$$\Lambda(t,\tau) = \frac{e^{-\frac{t\tau}{1-\tau}}}{1-\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)\,\tau^n .$$

$$L_n(t) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n \Lambda}{\partial \tau^n}\right)_{\tau=0}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Lambda(t,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\Lambda(t,z)}{z-\tau}\,dz \\[2ex] \left(\frac{d^n\Lambda(t,\tau)}{d\tau^n}\right) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{\Lambda(t,z)}{(z-\tau)^{n+1}}\,dz \end{array}\right.$$

$$L_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\Lambda(t,\xi)}{\xi^{n+1}}\,d\xi$$

Smena $\cancel{\xi = \frac{t}{z}}$ $\xi = 1 - \frac{t}{z}$; $d\xi = \frac{t}{z^2}\,dz$

$$L_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\dfrac{e^{-\frac{t(1-\frac{t}{z})}{1-(1-\frac{t}{z})}}}{1-(1-\frac{t}{z})}}{\left(1-\frac{t}{z}\right)^{n+1}}\,\frac{t}{z^2}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\dfrac{e^{-\frac{t\left[\frac{z-t}{z}\right]}{\frac{z-z+t}{z}}}}{\frac{z-z+t}{z}}}{\dfrac{(z-t)^{n+1}}{z^{n+1}}}\,\frac{t\,dz}{z^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\dfrac{e^{-\frac{\cancel{t}}{\cancel{z}}(z-t)\frac{z}{\cancel{t}}}}{\frac{t}{z}}}{\dfrac{(z-t)^{n+1}}{z^{n+1}}}\,\frac{t\,dz}{z^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{-z}e^{t}\cdot\frac{z}{t}}{\dfrac{(z-t)^{n+1}}{z^{n+1}}}\,\frac{t\,dz}{z^2} = \frac{1}{2\pi i}e^t\oint_C \frac{z^n e^{-z}}{(z-t)^{n+1}}\,dz$$

$$= e^t\,\frac{1}{n!}\,\underbrace{\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{z^n e^{-z}}{(z-t)^{n+1}}\,dz} = \frac{e^t}{n!}\,\frac{d^n}{dt^n}\left(t^n e^{-t}\right)$$

Dakle: $\boxed{L_n(t) = \frac{1}{n!}\,e^t\,\frac{d^n}{dt^n}\left(t^n e^{-t}\right)}$

U nekim knjigama koriste se definicije:

$$\tilde{L}_n(t) = e^{t} \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$$

20

tj. $$\Lambda(t,\tau) = \sum \tilde{L}_n(t) \frac{\tau^n}{n!}$$

$$\frac{\tilde{L}_n(t)}{n!} = L_n(t)$$

$L_0 = 1$

$L_1 = 1 - t$

$L_2 = 1 - 2t + \frac{1}{2}t^2 + \cdots$

$$\Lambda = \frac{e^{-\frac{t\tau}{1-\tau}}}{1-\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)\,\tau^n = L_0 + L_1\tau + L_2\tau^2 + \dots + L_n$$

21

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = L_0'(t) + L_1'(t)\tau + L_2'(t)\tau^2 + \dots \; L_n'(t)\tau^n$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \tau} = L_1 + 2L_2\tau + 3L_3\tau^2 + \dots + nL_n\tau^{n-1} + (n+1)L_{n+1}\tau^n$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = \frac{1}{1-\tau}\, e^{-\frac{t\tau}{1-\tau}} \left[-\frac{\tau}{1-\tau}\right] = \frac{-\tau\, e^{-\frac{t\tau}{1-\tau}}}{(1-\tau)^2} = -\frac{\tau}{1-\tau}\Lambda$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \tau} = \frac{e^{-\frac{t\tau}{1-\tau}}(-1)\frac{t(1-\tau) - t\tau(-1)}{(1-\tau)^2}(1-\tau) - e^{-\frac{t\tau}{1-\tau}}(-1)}{(1-\tau)^2}$$

$$= \Lambda\, \frac{-\frac{t(1-\tau)+t\tau}{(1-\tau)^2}\cancel{(1-\tau)} + 1}{(1-\tau)}$$

$$= \Lambda\, \frac{-\frac{t}{1-\tau} + 1}{(1-\tau)^{\cancel{2}}} = \Lambda \frac{\frac{-t+1-\tau}{1-\tau}}{1-\tau} = \underline{\underline{(-t+1-\tau)\Lambda/(1-\tau)^2}}$$

4

$$(-t+1-\tau)\left[L_0 + L_1\tau + L_2\tau^2 + \dots + L_{n-1}\tau^{n-1} + L_n\tau^n\right] = (1-\tau)^2\left[L_1 + 2L_2\tau + \dots + nL_n\tau^{n-1} + \right]$$

$$(1-t-\tau)\left[L_0 + L_1\tau + \dots L_{n-1}\tau^{n-1} + L_n\tau^n + \right] = (1-2\tau+\tau^2)\left[L_1 + 2L_2\tau + \dots nL_n\tau^{n-1} + (n+1)L_{n+1}\tau^{n} + \right]$$

$$\cancel{(1-t)L_n - L_{n-1} = (n+1)L_{n+1}}$$

$$(1-t)L_n - L_{n-1} = (n+1)L_{n+1} - 2nL_n + (n-1).$$

dosl.: $L_0 = 1$, $L_1 = 1-t$

$$\boxed{L_n[1-t+2n] = nL_{n-1} + (n+1)L_{n+1}}$$

$n=1$ $\cancel{2L_2 = (1-t)L_1 - L_0 = (1-t)(1-t) - 1 = 1 - 2t + t^2 - 1}$

$$(1-t)[1-t+2] = 1 + 2L_2$$

$$\cancel{1} - t + 2 - t + t^2 - 2t = \cancel{1} + 2L_2$$

$$2 - 4t + t^2 = 2L_2 \quad 4 \quad \text{o.k.}$$

$$(1-\tau)\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = -\tau \Lambda$$

$$(1-\tau)\left[L_0' + L_1'\tau + L_2'\tau^2 + \dots + L_n'\tau^n + \dots\right] = -\tau\left[L_0 + L_1\tau + L_2\tau^2 + \dots + L_n\tau^n + \dots\right]$$

$$\boxed{L_n' - L_{n-1}' = -L_{n-1}}$$

Darstell

$$w(t) = t^n e^{-t}$$

$$w' = n t^{n-1} e^{-t} - t^n e^{-t} = \frac{n}{t} w - w$$

$$t w' = (n-t) w$$

$$w^{n+2} t + \binom{n+1}{1} w^{n+1} = w^{n+1} (n-t) - w^n \binom{n+1}{1}$$

$$\binom{n+1}{1} = \frac{(n+1)!}{1!\, n!} = (n+1)$$

$$t \frac{d^2 w^n}{dt^2} + [\cancel{n} + 1 - \cancel{n} + t] \frac{d w^n}{dt} + (n+1) w^n = 0$$

$$t \frac{d^2 w^n}{dt^2} + (1+t) \frac{d w^n}{dt} + (n+1) w^n = 0$$

$$w^n = n!\, e^{-t} L_n(t)$$

$$\frac{d w^n}{dt} = n! \left[(-1) e^{-t} L_n(t) + e^{-t} \frac{d L_n}{dt}\right] = n!\, e^{-t} \left[-L_n + \frac{d L_n}{dt}\right]$$

$$\frac{d^2 w^n}{dt^2} = n! \left\{ -e^{-t} \left[-L_n + \frac{d L_n}{dt}\right] + e^{-t} \left[-\frac{d L_n}{dt} + \frac{d^2 L_n}{dt^2}\right] \right\}$$

$$= n!\, e^{-t} \left\{ \frac{d^2 L_n}{dt^2} - 2 \frac{d L_n}{dt} + L_n \right\}$$

$$t \frac{d^2 L_n}{dt^2} - 2t \frac{d L_n}{dt} + \cancel{t L_n} + (1+t) \frac{d L_n}{dt} - \underline{(1+\cancel{t}) L_n} + \underline{(n+1) L_n} = 0$$

$$t \frac{d^2 L_n}{dt^2} + (1-t) \frac{d L_n}{dt} + n L_n = 0$$

23 16

26.XII'98

$\frac{d^s}{dt^s}(uv) = u^{(s)}v + \binom{s}{1}u^{(s-1)}v' + \binom{s}{2}u^{(s-2)}v'' + \dots + uv^{(s)}$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

3. Laguerreova diferencijalna jednačina

Uvedimo pomoćnu funkciju $w(t) = t^n e^{-t}$ za koju lako nalazimo

$$w' = nt^{n-1}e^{-t} - t^n e^{-t} = \frac{n}{t}w - w \quad \text{tj.}$$
$$tw' - (n-t)w = 0$$

Ako poslednju relaciju diferenciramo $(n+1)$ puta i povedemo računa o relaciji (3.2), koja kaže da je $w^{(n)} = n!e^{-t}L_n(t)$, posle svih sređivanja dobijamo

$$t\frac{d^2L_n(t)}{dt^2} + (1-t)\frac{dL_n(t)}{dt} + nL_n(t) = 0 \tag{3.4}$$

Ovo je specijalni slučaj tzv. Laguerreove diferencijalne jednačine koja u opštem slučaju glasi

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + (1-t)\frac{dy}{dt} + \sigma y = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left[te^{-t}y'\right] + \sigma e^{-t}y = 0$$

Treći dvočas ove sekcije

Laguerreovi polinomi su partikularni integrali ove jednačine za $\sigma = n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ koji postaju polinomi u $t = 0$.

4. Ortogonalnost i norma Laguerreovih polinoma

Laguerreovi polinomi su međusobno ortogonalni u intervalu $(0, \infty)$ sa težinom e^{-t}. Da bi dokazali ovo napišimo diferencijalne jednačine za Laguerreove polinome za cele brojeve n i k

$$\frac{d}{dt}\left[te^{-t}\frac{dL_n(t)}{dt}\right] + ne^{-t}L_n(t) = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left[te^{-t}\frac{dL_k(t)}{dt}\right] + ke^{-t}L_k(t) = 0$$

Ako prvu jednačinu pomnožimo sa $L_k(t)$ a drugu sa $L_n(t)$ pa oduzmemo drugu od prve dobijamo

$$\frac{d}{dt}\left[te^{-t}\left(L_k(t)L_n'(t) - L_k'(t)L_n(t)\right)\right] + (n-k)e^{-t}L_n(t)L_k(t) = 0$$

Integracijom poslednje jednačine od 0 do ∞ nalazimo

$$(n-k)\int_0^\infty e^{-t}L_n(t)L_k(t)\,dt = 0$$

odakle, za $n \neq k$ sledi dokaz tvrđenja da su Laguerreovi polinomi ortogonalni sa težinom e^{-t}

+0 $$\int_0^\infty e^{-t} L_n(t) L_k(t)\, dt = 0 \qquad (n \neq k) \tag{3.5}$$

Za norme Laguerreovih polinoma (sa istom težinom i u istom intervalu) nalazimo

$$\begin{aligned} \|L_n(t)\|^2 &= \int_0^\infty e^{-t} L_n^2(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} L_n(t) \frac{1}{n} \left[(2n-1-t)L_{n-1}(t) - (n-1)L_{n-2}(t)\right] dt \end{aligned}$$

Pri pisanju drugog integrala jedan od Laguerreovih polinoma zamenili smo na osnovu rekurentne formule (3.3) za $n \to n-1$. Ako iskoristimo ortogonalnost Laguerreovih polinoma dobijamo

$$\|L_n(t)\|^2 = \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-t} L_n(t) \left[-tL_{n-1}(t)\right] dt$$

Ako ponovo primenimo relaciju (3.3) za $n \to n$ i iskoristimo ortogonalnost Laguerreovih polinoma dobijamo

$$\begin{aligned} \|L_n(t)\|^2 &= \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-t} L_{n-1}(t) \left[(n+1)L_{n+1}(t) - (2n+1)L_n(t) + nL_{n-1}(t)\right] dt \\ &= \|L_{n-1}(t)\|^2 \end{aligned}$$

odakle vidimo da su norme svih Laguerreovih polinoma međusobno jednake i stoga je dovoljno da nađemo normu polinoma $L_0(t)$ i da time znamo normu svih polinoma.

$$\|L_0(t)\|^2 = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$$

Dakle, Laguerrovi polinomi imaju jediničnu normu pa pišemo

$$||L_n(t)|| = 1 \tag{3.6}$$

5. Laguerreove funkcije

Na osnovu svega navedenog zaključujemo da su funkcije

$$\lambda_n(t) = e^{-t/2} L_n(t) = \frac{1}{n!} e^{t/2} \frac{d^n}{dt^n} \left(t^n e^{-t}\right)$$

25 18

ortonormirane u smislu skalarnog proizvoda u $L_2(0,\infty)$. Ove funkcije čine ustvari potpuni ortonormirani sistem, a to znači da svaka funkcija $f(t)$ neprekidna i kvadratno integrabilna u intervalu $(0,\infty)$ sa težinom e^{-t} koja je ortogonalna na sve Laguerreove polinome (u istom intervalu sa istom težinom) identički je jednaka nuli. Prema uslovima teoreme funkcija $f_1(t) = f(t)e^{-t/2}$ kvadratno je integrabilna u intervalu $(0,\infty)$ sa težinom $\varrho(t) = 1$. Utoliko pre će to biti slučaj sa funkcijom $f_2(t) = f(t)e^{-t}$.

Uvedimo funkciju

$$g(t) = \begin{cases} f(t)e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

ova je kvadratno integrabilna, sa težinom $\varrho \equiv 0$ u $(-\infty,+\infty)$ i ima stoga Fourierovu transformaciju

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-t+i\omega t}\,dt.$$

Funkcija $\tilde{g}(\omega)$ svuda je analitička i može se razviti u red oko tačke $\omega = 0$.

$$\tilde{g}^{(k)}(\omega) = \frac{(i)^k}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t^k g(t)e^{i\omega t}\,dt = \frac{(i)^k}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} t^k g(t)e^{-t+i\omega t}\,dt$$

$$\tilde{g}^{(0)} = \frac{(i)^k}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} t^k g(t)e^{-t}\,dt \equiv 0$$

Poslednji izraz jednak je nuli po uslovima teoreme. Dakle pokazali smo da je

$$\tilde{g}^{(k)}(\omega) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad G(t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad f(y) \equiv 0$$

Funkcije $\lambda_n(t)$ ne zadovoljava Laguerreovu diferencijalnu jednačinu. Ali ako se u ovu jednačinu ubaci $L_n(t) = \lambda_n(t)e^{t/2}$ dobija se diferencijalna jednačina za funkcije $\lambda_n(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(t\frac{d\lambda_n(t)}{dt}\right) + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{t}{4}\right)\lambda_n(t) = 0$$

Da.

6. Generalisani Laguerreovi polinomi

Za neke primene u teorijskoj fizici potrebni su generalisani Laguerreovi polinomi. Njihova generatrisa je

$$\Lambda^{\alpha}(t,\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^{\alpha+1}}e^{-\dfrac{t\tau}{1-\tau}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(t)\tau^n \quad (\alpha > -1)$$

Obični polinomi odgovaraju slučaju $\alpha = 0$. Rekurentne formule analogne onim koje smo izveli za obične Laguerreove polinome kod generalisanih imaju oblik

$$L_n^{\alpha}(t) = \frac{1}{n!}t^{-\alpha}e^t\frac{d^n}{dt^n}\left(t^{n+\alpha}e^{-t}\right)$$

$$L_0^{\alpha} = 1, \qquad L_1^{\alpha} = 1 + \alpha - t,$$

26 19

$$(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(t) - (2n+1+\alpha-t)L_n^{\alpha}(t) + (n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt}L_n^{\alpha}(t) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(t)$$

26.III

Naime iz generatrise $\Lambda^{\alpha}(t,\tau)$ dobija se

$$(1-2\tau+\tau^2)\frac{\partial \Lambda^{\alpha}}{\partial \tau} = [\alpha+1-t-(\alpha+1)\tau]\Lambda^{\alpha} \qquad \frac{\partial \Lambda^{\alpha}}{\partial \tau} = -\tau\Lambda^{\alpha+1}$$

što daje navedenu rekurentnu formulu

Generalisani Laguerreovi polinomi zadovoljavaju sledeću diferencijalnu jednačinu

TO

$$t\frac{d^2L_n^{\alpha}(t)}{dt} + (\alpha+1-t)\frac{dL_n^{\alpha}(t)}{dt} + nL_n^{\alpha}(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[t^{\alpha+1}e^{-t}\frac{dL_n^{\alpha}(t)}{dt}\right] + nt^{\alpha}e^{-t}L_n^{\alpha}(t) = 0$$

Generalisani Laguerreovi polinomi ortogonalni su u $L_2(0,\infty)$ sa težinom $\varrho(t) = t^{\alpha}e^{-t}$

TO

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha}e^{-t}L_k^{\alpha}(t)L_n^{\alpha}(t)\,dt = 0 \qquad (n \neq k)$$

Norma generalisanih Laguerreovih je

TO

$$\|L_n^{\alpha}\|^2 = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$$

Generalisane Laguerreove funkcije koje imaju jediničnu normu i formiraju ortonormirani sistem definišemo na sledeći način

$$\lambda_n^{\alpha}(t) = t^{\alpha/2}e^{-t/2}L_n^{\alpha}(t)\cdot\frac{1}{\|L_n^{\alpha}(t)\|}$$

$$= \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}}\,t^{\alpha/2}e^{-t/2}L_n^{\alpha}(t) \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Ove funkcije su rešenja sledeće diferencijalne jednačine

$$\frac{d}{dt}\left(t\frac{d\lambda_n^{\alpha}(t)}{dt}\right) + \left(n + \frac{\alpha+1}{2} - \frac{t}{4} - \frac{\alpha^2}{4t^2}\right)\lambda_n^{\alpha}(t) = 0$$

27.II '97

Hermiteovi polinomi

1. Generatrisa

Funkcija

$$X(t,\tau) = e^{2t\tau-\tau^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t)\frac{\tau^n}{n!}$$

je generatrisa polinoma koje nazivamo Hermiteovi. Pokazaćemo da su $H_n(t)$ stvarno polinomi. Naime,

$$H_n(t) = \left(\frac{\partial^n X}{\partial \tau^n}\right)_{\tau=0} = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{e^{2t\xi-\xi^2}}{\xi^{n+1}}d\xi = e^{t^2}\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{e^{-(t-\xi)^2}}{\xi^{n+1}}d\xi$$

$\frac{d^n\psi(t)}{d\tau^n} = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{\psi(t,z)}{(z-\tau)^{n+1}}dt$

Ako se izvrši smena integracionih promenljivih $t-\xi = z$ imaćemo

$$H_n(t) = e^{t^2}\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{C'} \frac{e^{-z^2}}{[-(z-t)]^{n+1}}(-dz) = e^{t^2}\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{C'} \frac{(-1)^n e^{-z^2}}{(z-t)^{n+1}}dz$$

a odavde vidimo

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2}\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t^2}\right)$$

Poslednja formula analogna je Rodrigesovoj formuli za Legendreove polinome. Ona pokazuje da su $H_n(t)$ zaista polinomi i to polinomi n-tog stepena.

Prvih nekoliko Hermiteovih polinoma su

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = 2t, \quad H_2(t) = 4t^2 - 2, \ldots$$ $H_3(t) = 8x^3 - 12x$

Takođe važi da je

$$H_n(-t) = (-1)^n H_n(t)$$?

Rekurentne formule

Na osnovu definicione relacije $X(t,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t)\frac{\tau^n}{n!}$ može se diferencirenjem po t i τ naći

$$H_{n+1}(t) - 2tH_n(t) + 2nH_{n-1}(t) = 0$$
$$H_n'(t) = 2nH_{n-1}(t)$$

Druga od ovih formula $n-1 \to n$ dozvoljava da se nađe neordeđeni integral bilo kog Hermiteovog polinoma

$$\int H_n(t)\,dt = \frac{1}{2(n+1)}H_{n+1}(t)$$

Prva od rekurentnih formula dozvoljava da se nađu svi Hermiteovi polinomi ako se znaju $H_0(t)$ i $H_1(t)$. Postoje naravno i mnoge druge rakurentne formule a ovde ćemo navesti samo još jednu koja se dobija kada se iz navedenih eliminiše $H_{n-1}(t)$

$$H_{n+1}(t) + H_n'(t) - 2tH_n(t) = 0$$

12.IV '16

3. Hermiteova diferencijalna jednačina

Uvedimo pomoćnu funkciju $w(t) = e^{-t^2}$ čijim diferenciranjem po t dobijamo

$$w' + 2tw = 0$$

a diferenciranjem ovog identiteta $(n+1)$ puta dobićemo, posle nekih sređivanja i uprošćavanja $\frac{d^2}{dt^2} w^{(n)} + 2x \frac{d}{dt} w^{(n)} + 2(n+1) w^{(n)} = 0$ stavimo smenu $w^{(n)} = e^{-t^2} H_n$ i nakon sređivanja dobijamo:

$$\frac{d^2 H_n(t)}{dt^2} - 2t \frac{dH_n(t)}{dt} + 2nH_n(t) = 0$$

Ovo je specijalni slučaj Hermiteove diferencijalne jednačine koja u opštem slučaju ima oblik

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 2t \frac{dy}{dt} + 2\sigma y = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t^2} \frac{dy}{dt}\right) + 2\sigma y e^{-t^2} = 0$$

Hermiteovi polinomi su partikularno rešenje ove jednačine za $\sigma = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

4. Ortogonalnost i norma Hermiteovih polinoma

Hermiteovi polinomi su ortogonalni, sa težinom $\varrho(t) = e^{-t^2}$ u intervalu $(-\infty, +\infty)$. Neka su $H_n(t)$ i $H_k(t)$ $(n \neq k)$ dva Hermiteova polinoma za koja važi

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-t^2} \frac{dH_n(t)}{dt}\right] + 2nH_n(t)e^{-t^2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-t^2} \frac{dH_k(t)}{dt}\right] + 2kH_k(t)e^{-t^2} = 0$$

Množenjem prve od ovih jednačina sa $H_k(t)$, a druge sa $H_n(t)$ i oduzimanjem, vodeći računa da je

$$y_2 \frac{d}{dt}\left(e^{-t^2} y_1'\right) - y_1 \frac{d}{dt}\left(e^{-t^2} y_2'\right) = \frac{d}{dt}\left[e^{-t^2}(y_1' y_2 - y_2' y_1)\right),$$

a zatim integracijom u intervalu $(-\infty, +\infty)$ dobija se

$$2(n-k) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_n(t) H_k(t)\, dt = 0$$

tj. za $n \neq k$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_n(t) H_k(t)\, dt = 0$$

Sve nule Hermiteovih polinoma proste su i nalaze se u intervalu $(-\infty, +\infty)$.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_n^2 \, dt$$

$$u = H_n \qquad dv = H_n e^{-t^2} dt = (-1)^n e^{t^2} e^{-t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} = (-1)^n \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} e^{-t}\right) dt$$

$$du = dH_n = 2n H_{n-1} dt \qquad v = -(-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} e^{-t^2}}{dt^{n-1}}$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_n^2 \, dt = \overbrace{H_n (-1)^n \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}^{0} + \int_{-\infty}^{+\infty} 2n H_{n-1} (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} e^{-t^2}}{dt^{n-1}} dt =$$

$$= 2n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_{n-1}^2 \, dt = \ldots = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{H_0}_{1} e^{-t^2} dt = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

29 22

Za norme Hermiteovih polinoma imamo

$$||H_n(t)||^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_N^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_n(t)\, [2tH_n(t) - 2(n-1)H_{n-2}(t)]\, dt$$

Za dobijanje drugog integrala iskoristili smo prvu rekurentnu formulu za $n \to n-1$. Ako poslednji integral podelimo na dva dela drugi deo će biti nula zbog ortogonalnosti Hermiteovih polinoma a prvi ponovnom primenom rekurentne formule daje

$$||H_n(t)||^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} H_n(t) H_{n-1}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_{n-1}(t)\, [H_{n+1}(t) + 2nH_{n-1}(t)]\, dt$$

I ovde je prvi integral na desnoj strani jednak nuli zbog ortogonalnosti a drugi daje definitivno

$$||H_n(t)||^2 = 2n||H_{n-1}(t)||^2$$

Na osnovu poslednje relacije možemo pisati

$$||H_n(t)||^2 = 2^n n! ||H_0(t)||^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

jer je

$$||H_0(t)||^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

3.XII '98

5. Hermiteove funkcije

Funkcije

$$\mathcal{X}_n(t) = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} (-1)^n e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-t^2} \right)$$

$\|H_n\|$

Hermiteove su funkcije i obrazuju potpunu ortonormirani sistem u $L_2(-\infty, +\infty)$. To znači da svaka funkcija $f(t)$ neprekidna i kvadratno integrabilna sa težinom e^{-t^2} u intervalu $(-\infty, +\infty)$, koja je ortogonalna na sve Hermiteove polinome (u istom intervalu sa istom težinom) identički je jednaka nuli.

Po uslovima teoreme, funkcija $f_1(t) = f(t)e^{-t^2/2}$ kvadratno je integrabilna sa težinom $\varrho(t) = 1$ u intervalu $(-\infty, +\infty)$ utoliko pre je onda kvadratno integrabilna sa težinom $\varrho(t) = 1$ u istom intervalu funkcija $g(t) = f(t)e^{-t^2}$. Dakle, funkcija $g(t)$ ima Fourierov transform

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-t^2 + i\omega t} dt$$

Pošto je funkcija $\tilde{g}(\omega)$ svuda analitička, može se razviti u red oko $\omega = 0$ pri čemu se izvodi mogu odrediti neposrednim diferenciranjem integrala

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{(i)^k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t) e^{-t^2 + i\omega t} dt \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}^{(k)}(0) = \frac{(i)^k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t) e^{-t^2} dt$$

Dakle, $\tilde{g}(\omega) \equiv 0$ što primenom obrnute transformacije dobija se

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = 0$$

a na osnovu toga što je $g(t) = 0$ sledi da je i $f(t) = 0$ što je trebalo pokazati.

Možemo da zaključimo da funkcije $\mathcal{X}(t)$ čine potpuni ortonormirani sistem u prostoru $L_2(-\infty, +\infty)$.

Na osnovu diferencijalne jednačine za Hermiteove polinome lako se pokazuje da Hermiteove funkcije zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d^2 \mathcal{X}_n(t)}{dt^2} + (2n + 1 - t^2)\mathcal{X}_n(t) = 0$$

odnosno

$$-\frac{d^2 \mathcal{X}_n(t)}{dt^2} + t^2 \mathcal{X}_n(t) = (2n + 1)\mathcal{X}_n(t)$$

$t = \alpha x$

$$-\frac{d^2 \psi(\alpha x)}{dx^2} + \alpha^4 x^2 \psi(\alpha x) = \alpha^2 (2n+1) \psi(\alpha x)$$

H.O

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \psi = E\psi$$

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} x^2 \psi = \frac{2m}{\hbar^2} E \psi$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} = \alpha$$

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha^4 x^2 \psi = \frac{2m}{\hbar} E \psi$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} E = (2n+1)\alpha^2$$

$$\underline{E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)}$$